CONCOURS COMMUN ECOLES CATHOLIQUES 1979

(E.S.E.O. H.E.I. I.C.A.M. I.C.P.I. I.S.E.N. I.S.E.P. I.T.R.)

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée: 4 heures

SÉRIE P

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

I.

1°) On définit une fonction numérique g sur [0,1] par $g(t) = t^{3/2} \operatorname{Log} t$, si $t \neq 0$, et par la donnée de g(0). Montrer que l'on peut choisir g(0) pour que g soit continue en 0. Montrer que g est alors continue et dérivable sur [0,1]. Etudier les variations et construire le graphe de g.

2°) Pour quelles valeurs du nombre réel p les intégrales $I_p = \int_0^1 t^p \operatorname{Log} t \, dt$ sont-elles convergentes ? Dans ce cas, les calculer.

3°) Soit $x \in]-1, 1[$ et n un entier positif ou nul ; on note f_x et $f_{x,n}$ les fonctions de la variable réelle t définies par :

$$f_x(0) = 0 \text{ et, pour } t \neq 0 \text{ , } f_x(t) = \frac{t^{3/2} \operatorname{Log} t}{1 - xt} \text{ ,}$$

$$f_{x,n}(0) = 0 \text{ et, pour } t \neq 0 \text{ , } f_{x,n}(t) = x^n t^{n+3/2} \operatorname{Log} t.$$

Montrer que les fonctions f_x et $f_{x,n}$ sont continues sur [0,1] et que l'on a, pour tout $t \in [0,1]$, l'inégalité :

$$\left| f_x(t) - \sum_{n=0}^{p} f_{x,n}(t) \right| \leq \frac{2}{3e} \frac{|x|^{p+1}}{1-|x|} \text{ .}$$

4°) On définit dans $]-1, 1[$ une fonction numérique F par

$$F(x) = \int_0^1 f_x(t) \, dt.$$

Montrer qu'il existe une série entière ayant pour somme F dans $]-1, +1[$. En déterminer le rayon de convergence R et étudier la convergence de la série pour $|x| = R$.

II.

1°) Pour quelles valeurs des nombres réels p, les intégrales

$$J_p = \int_0^1 t^p \operatorname{Log}(1-t) \, dt$$

.../...

sont-elles convergentes ? Calculer J_0 .

Montrer que pour $p \geqslant 0$ on a : $-1 \leqslant J_p \leqslant \frac{-1}{p+2}$.

2°) Soit $x \in]-1, 1[$.

Donner des expressions explicites des fonctions S_x, $S_{x,n}$ et $R_{x,n}$ définies sur $[0,1[$ par :

$$S_x(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} x^p t^p \operatorname{Log}(1-t) ,$$

$$S_{x,n}(t) = \sum_{p=0}^{n} x^p t^p \operatorname{Log}(1-t) ,$$

$$R_{x,n}(t) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} x^p t^p \operatorname{Log}(1-t).$$

3°) Pour $x \in]-1, 1[$ et n entier, on pose $N_{x,n} = \int_0^1 R_{x,n}(t)\,dt$.

Montrer que l'intégrale est convergente et que la suite $(N_{x,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

4°) Montrer que les intégrales $S(x) = \int_0^1 S_x(t)\,dt$ et $\int_0^1 S_{x,n}(t)\,dt$ sont convergentes.

Montrer que $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} J_n x^n$. Déterminer le rayon de convergence R' de la série entière ainsi introduite.

Calculer $\forall p \in \mathbb{N}$, J_p (dans l'expression de J_p apparaît une somme).

Etudier la convergence de la série de terme général $J_n x^n$ pour $|x| = R'$.

5°)

On pose $T(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1) J_p x^{p+1}$. Montrer qu'il existe un polynôme du premier degré A tel que $A(x)\,T(x) = \operatorname{Log}(1-x)$ et déduire de ce résultat une expression de S au moyen de fonctions usuelles et d'une primitive (qu'on ne cherchera pas à expliciter) de fonctions usuelles.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail